Ř 1

Nekonečné řady

1. Definice: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$ – nekonečná řada (číselná)

$\{\sum_{n=1}^{k} a_n\} = \{s_k\}$ – posloupnost částečných součtů

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, když $\lim_{k\to\infty} s_k = s \in R$

(pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, když $\lim_{k\to\infty} s_k = \pm\infty$ nebo $\{s_k\}$ limitu nemá!

2. „Smysl"

když $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in R$

$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists k_0\ \forall k>k_0 : \left|\sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$

Součet konvergentní řady lze s libovolnou přesností aproximovat konečným součtem

3. Řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$

Def. obor f – množina všech $x \in R$, kde $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje

Speciální funkční řady (důležité)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ – mocninná řada (se středem v x_0)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ – Taylorova řada pro funkci f (se středem x_0)

geometrické řady

Př. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \iff |q|<1$

($s_k = \frac{1-q^k}{1-q}$) (konverguje $\iff$ $|q|<1$)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ diverguje

$s_{2k} = (1-1)+(1-1)+\dots+(1-1) = 0$

$s_{2k+1} = (1-1)+(1-1)+\dots+(1-1)+1 = 1$

tj. $\{0,1,0,1,\dots\}$ nemá limitu

Př. $0{,}a_1a_2a_3a_4\dots =$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{10^i}$,

chyba $|\varepsilon| < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{9}{10^i} = \frac{1}{10^k}$

Př. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konv. v $(-1,1)$ jinde diverguje

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (viz geom. řada)

(říkáme také, že funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ je v int. $(-1,1)$ rozvinuta v (mocninnou) řadu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

2) $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

$q = -x^2$

$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

Ř 2

Když platí (f má derivace všech řádů v x_0)

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

v $U(x_0)$, říkáme, že funkce f je rozvinutelná v Taylorovu řadu (v $U(x_0)$)

Př: 1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in R$

2) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in R$

3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $x \in R$

4) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1, 1\rangle$

Trigonometrické řady

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Př: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

Počítání s řadami:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv, $c \in R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ konverg

2) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konv, $\sum_{1}^{\infty} b_n$ konv $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konverg.

(zjistit až o limitách)

Kritéria konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: (konvergence řady nezávisí na konečně mnoha členech řady)

I (nutná podmínka konvergence)

$\sum_{1} a_n$ konverg $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(tedy ekvivalentně: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverg.)

Př: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverg. ($\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$)

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3n}{2n+1}$ diverg ($\lim \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2} \neq 0$)

ale $\sum \frac{1}{n}$ diverguje, i když $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ není postačující pro konvergenci)

Ř 3

<u>Kritéria konvergence</u>

II. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ (nebo $a_n \leq 0$)

(zde $\{s_n\}$ je neklesající posloupnost):

stačí ex. $\lim_{n\to\infty} s_n$;

$\lim_{n\to\infty} s_n = S \in R \iff \{s_n\}$ je shora omezená

1) <u>Integrální kritérium</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, f spojitá, nerostoucí v int. $\langle 1, +\infty)$, pak:

$\sum_{1}^{\infty} f(n)$ konverg. $\iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konv.

Př. (základní vzorec pro „srovnávání")

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverg. $\iff \alpha > 1$

(tj. $\sum \frac{1}{n}$ diverg, $\sum \frac{1}{n^2}$ konverg. apod.)

2. <u>Srovnávací kritérium</u>

a) $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n$, ($n \geq n_0$)

$\sum_{1}^{\infty} b_n$ konv. $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n$ konv.

($\Leftarrow$) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ diverg. $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} b_n$ diverg.)

Př. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konv. $\quad \sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ diverg.

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konv.

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ konv $\left(\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \right)$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$ konv $\left(\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n} \right)$

b) <u>limitní srovnání</u>: $a_n \geq 0, b_n > 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

je-li $A > 0$, pak $\sum_{1}^{\infty} a_n$ k. $\iff \sum_{1}^{\infty} b_n$ k.

je-li $A = 0$, pak $\sum_{1}^{\infty} b_n$ k. $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n$ k.

Př. 1) $\sum_{1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ k.: $\sin\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

nebo $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$

2) $\sum \sin\frac{1}{n}$ diverg.

$\sin\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$ div. $\to$ $\to$ o nic. srovn. nelze nic říci

ale $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \sum \sin\frac{1}{n}$ diverg

Č 4

c) Konvergence geometrických řad

1) Cauchyho limitní kritérium pro $\sum a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \begin{cases} <1 & \sum \text{konv.} \\ =1 & ? \\ >1 & \sum \text{div.} \end{cases}$$

2) D'Alembertovo limitní kritérium ($a_n > 0$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \begin{cases} <1 & \text{konv.} \\ =1 & ? \\ >1 & \text{div.} \end{cases}$$

Př. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

řada konverguje

2) $\sum \frac{a^n}{n}$ $\quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{a}{\sqrt[n]{n}} \to a$,

$0 < a$ $\Rightarrow$ $\sum$ konv., když $a \in (0,1)$

$\sum$ div. pro $a \in (1,+\infty)$

$a = 1$ $\quad \sum \frac{1}{n}$ div.

3) (př. 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{4^{n+1}}}{\frac{n^2}{4^n}} = \lim \frac{1}{4} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$ konv.

4) $\sum_{0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (D'Alem.) (konv.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ řada konv.

III. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a_n – libovolné

Věta $\sum |a_n|$ konvg. $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvg.
($\sum a_n$ konverguje absolutně)

Poznámka: D'Alemb. krit pro abs. konvergenci

$$\sum_1^{\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a \begin{cases} <1 & \text{konvg. ab.} \\ =1 & ? \\ >1 & \text{divg.} \end{cases}$$

Alternující řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \; a_n \geq 0$

Kriterium (Leibniz):

$\sum (-1)^{n-1} a_n$, $a_n \geq 0$, a_n nerost. posl.

pak $\sum (-1)^{n-1} a_n$ konvg. $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Př. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ konvg. ab. pro $\forall x \in R$ $\Uparrow$

$0 \leq \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ konvg.

Př. 1) $\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvg. ab. $\forall x \in R$ $\Uparrow$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{1}{n+1} = 0 \quad \forall x \in R$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x|^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x|, \text{ tj.}$$

pro $|x| < 1$ řada konvg. ab.

$|x| > 1$ diverguje

$|x| = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divg. $(x=1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$?

Př. $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvg.

$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ konvg.

ale $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divg.

(int. kriterium)

Ř 6

Řady funkcí

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ tam, kde konverguje

$D_f = \{ x;\ x \in D f_n\ \forall n \ \wedge\ \sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje $\}$

$=$ obor konvergence řady $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$

(značme v příkladech O)

Př. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $O = R$

$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $O = R$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $O = \langle -1, 1)$

$\sum_{0}^{\infty} x^n$ $O = (-1, 1)$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n \sqrt{n}}$ $\underline{O = \langle 1, 5)}$

(D'Alemb.)

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{|x-3|}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|x-3|}{2}$

1. pro $|x-3| < 2$ konv. absolutně

$|x-3| > 2$ diverg.

$|x-3| = 2$, 1.

$x = 1$ $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konv. (Leibn.)

$x = 5$ $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverg. (integrál. kr.)

Mocninné řady

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $x_0 \in R$, $a_n \in R$ (zde $0^0 = 1$)

1) řada konverguje vždy v bodě $x = x_0$ (střed mocninné řady)

2) obor konvergence je buď $\{x_0\}$, nebo $(-\infty, +\infty)$, nebo existuje $r > 0$ (poloměr konvergence řady (*)) tak, že řada (*) konverguje v $(x_0 - r, x_0 + r)$, a diverguje v $(-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, +\infty)$; v intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$ (resp. v R) konverguje absolutně

!

Př.: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konv. v $(-1, 1)$, $(r = 1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konv. v $\langle -1, 1)$ $(r = 1)$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje v R

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n n^2}$ konverguje v $\langle -1, 5 \rangle$ $(r = 3)$

Ř 7

Věta: nechť $O \neq \{x_0\}$ je obor konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ (*), označme součet řady $f(x)$ v O.

Potom platí:

1) řady (*) konvergují uvnitř O absolutně a stejnoměrně v každém int. $\langle a,b\rangle \subset O^\circ$;
2) fce f je spojitá v O;
3) uvnitř O (v O°) je
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$
(tedy řadu (*) lze v O° derivovat „člen po členu"), řady mají stejný pol. k.)
4) $$\int \sum_{0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + C$$
(řadu (*) lze integrovat „člen po členu")
(řady mají stejný poloměr konvergence)
5) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$ v nějakém okolí bodu x_0 $\Rightarrow$ $a_n = b_n$, $n = 0,1,2,\dots$
6) Z vlastnosti 3) plyne, že součet mocninné řady je funkce, mající derivace všech řádů
(určují se derivováním člen po členu)

Užití:

Př 1: (*) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad v\ (-1,1)$$
(geom. řada, kvocient $q = -x$)
(důkaz taky, že funkce $f(x) = \frac{1}{1+x}$ je rozvinuta v $(-1,1)$ v mocninnou řadu (*):

Potom (dle 4))
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \ln(1+x)$$
$x=0$: $\quad 0 + C = \ln 1 \Rightarrow C = 0$

tedy máme, že
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x),$$
(neboli $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$)
dokonce v intervalu $(-1,1\rangle$
(dle Leibniz. krit. řada integrace konverguje i v bodě $x=1$, navíc, dle 2) je součet řady v $(-1,1\rangle$ spojitý, tedy platí rovnost i pro $x=1$)

Př 2 $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad v\ (-1,1)$$
integrací:
$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
v $\langle -1,1\rangle$
(opět, integrační konst. je nula)

spec. pro $x = 1$
$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Taylorovy řady:

1) má-li fce f v bodě x_0 derivace všech řádů, pak lze formálně vytvořit řadu
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ \ldots \text{ Taylorova řada pro fci } f \text{ (o středu } x_0\text{)}$$

2) když Tayl. řada
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ konverguje}$$
v (x_0-r, x_0+r) (nebo případně i na krajích tohoto intervalu – r – poloměr konvergence), platí zde
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x) \ ?$$

Taylorova věta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_k(x)$$

Pak platí:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \iff \lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0$$

Věta: Je-li
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ v } U(x_0),$$
pak $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, tedy $\sum_{0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ je Tayl. řadou fce $f(x)$.

Příklad 1:

$f(x) = e^x$, fce e^x má všechny derivace v R,

dá se vyjádřit jako součet své Taylorovy řady?

$x_0 = 0$, pak $f^{(n)}(0) = 1$, $n \in N$

Tayl. řada: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, konverg. v R

Platí $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$? ... (1)

Zbytek (Lagrangeův tvar zbytku)
$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1},$$
kde ξ je bod mezi body x_0 a x,

zde
$$R_k(x) = \frac{e^{\xi} x^{k+1}}{(k+1)!}, \ \xi \text{ mezi } 0 \text{ a } x,$$

ale $\lim_{k\to\infty} \frac{e^{\xi} x^{k+1}}{(k+1)!} = 0$ pro $\forall x \in R$

($e^{\xi(k)}$ je omez. ~~fce~~ posloupnost a $\lim_{k\to\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = 0$), tedy vzorec (1) platí!

Příklad 2:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ v } \langle -1, 1 \rangle,$$

tedy jedná se o Tayl. řadu této funkce o středu $x_0 = 0$

Ještě další Taylorovy řady:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ v } R; \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ v } R$$